Teoría de números
Entrega 4: Teorema de Dirichlet
Versión 2003-05-10

CONTENIDO

Temas de las entregas anteriores: Funciones multiplicativas, Congruencias, La función Zeta, El teorema de los números primos.
Temas de las próximas entregas: Números algebraicos

TEOREMA DE DIRICHLET

TEOREMA DE DIRICHLET

El teorema de Dirichlet afirma lo siguiente:

> Si a y b son dos enteros positivos sin divisores primos comunes, entonces la sucesión $a_n = a + b \cdot n$ contiene infinitos números primos.

Realmente se prueba un resultado algo más fuerte que la afirmación anterior, ya que se demuestra que

$$\sum_{p \equiv a \bmod b} \frac{\ln(p)}{p} \to \infty$$

Demostración del Teorema de Dirichlet

La demostración se apoyará en las propiedades de determinadas funciones multiplicativas, para cuya definición se requieren algunos conceptos teóricos previos:

Sea G un grupo conmutativo[1] finito de orden h y con elemento unidad e. Un **carácter sobre** G es una función χ compleja no nula tal que $\chi(u \cdot v) = \chi(u) \cdot \chi(v)$ para todo $u, v \in G$. Puesto que la función inversa de un carácter así como el producto de dos caracteres mantiene también esta propiedad, se deduce inmediatamente que el conjunto de los caracteres forma a su vez un grupo conmutativo con la multiplicación. Se denomina **carácter principal** del grupo conmutativo G a la función χ_0 tal que $\chi_0(u) = 1$ para todo $u \in G$. El carácter principal hace de elemento unidad en el grupo de los caracteres.

Hay otras propiedades que se deducen fácilmente: Se tiene que $\chi(e) = 1$ y, dado que el orden de un elemento divide al orden del grupo, para todo $u \in G$ se cumple que $\left(\chi(u)\right)^h = \chi(u^h) = \chi(e) = 1$, lo cual implica que $|\chi(u)| = 1$. Dado que el número de raíces de la unidad de orden h es como máximo h, el número de caracteres c es finito, (cada carácter se puede considerar una variación con repetición de las raíces de la unidad de orden h, de modo como mucho podría haber h^h variaciones, aunque, como veremos enseguida, ese número es mucho menor).

Se necesitará un resultado previo: Para todo $u \in G$ distinto de la unidad existe al menos un carácter χ tal que $\chi(u) \neq 1$. (Ejercicio TeDi01)

---

[1] Aunque en este tema se está hablando de grupos en general, el lector que no esté familiarizado con la teoría de grupos puede limitarse a identificar el grupo G con los conjuntos de clases residuales reducidas $G = Z_q^*$ de las cuales ya obtuvimos su descomposición concreta en los apuntes sobre congruencias al estudiar el logaritmo discreto. Ese es el único grupo para el que se necesitan estas propiedades en la demostración del Teorema de Diriclet.

Representaremos por $\sum_{\chi}$ la suma para todos los diferentes caracteres del grupo G. Entonces se cumplen los siguientes resultados (Ejercicio TeDi02):

$\sum_{\chi} \chi(u) = \begin{cases} c & si \quad u = e \\ 0 & si \quad u \neq e \end{cases}$ para todo $u \in G$ donde $c = \sum_{\chi} 1$ es el número de caracteres

$\sum_{u \in G} \chi(u) = \begin{cases} h & si \quad \chi = \chi_0 \\ 0 & si \quad \chi \neq \chi_0 \end{cases}$ donde h es el orden de G

$c = h$

Para todo $u \in G$ y $v \in G$ se cumple $\frac{1}{h}\sum_{\chi} \frac{\chi(u)}{\chi(v)} = \begin{cases} 1 & si \quad u = v \\ 0 & si \quad u \neq v \end{cases}$

Para cualquier par de caracteres χ_1 y χ_2 se tiene que $\frac{1}{h}\sum_{u \in G} \frac{\chi_1(u)}{\chi_2(u)} = \begin{cases} 1 & si \quad \chi_1 = \chi_2 \\ 0 & si \quad \chi_1 \neq \chi_2 \end{cases}$

Fijado un entero positivo, q, consideramos los caracteres χ del grupo $G = Z_q^*$ de las **clases de congruencia módulo q de números coprimos con q**. Dado que este grupo tiene $\phi(q)$ elementos, lo podemos representar por $G = \{a_1, a_2, ..., a_{\phi(q)}\}$ donde los a_i son los representantes de cada clase de congruencia que cumplen $0 < a_i < q$. Ahora utilizamos los caracteres χ de G para obtener funciones extendidas de los mismos, las cuales toman valores para todos los números reales, según la igualdad:

$$\chi(n) = \begin{cases} \chi(a_i) & si \quad n \equiv a_i (\bmod q) \\ 0 & si \quad MCD(n, q) > 1 \end{cases}$$

Estas funciones se denominan **caracteres de Dirichlet módulo q** y es fácil observar que son **completamente multiplicativas**. Existen $\phi(q)$ funciones de este tipo, de las cuales se denomina **carácter principal de Dirichlet** a la función

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1 & si \quad n \equiv a_i (\bmod q) \\ 0 & si \quad MCD(n, q) > 1 \end{cases}$$

De las propiedades demostradas para los caracteres de un grupo se deducen directamente las siguientes:

$$\sum_{n (\bmod q)} \chi(n) = \begin{cases} \phi(q) & si \quad \chi = \chi_0 \\ 0 & si \quad \chi \neq \chi_0 \end{cases}$$

$$\sum_{\chi (\bmod q)} \chi(u) = \begin{cases} \phi(q) & si \quad u \equiv 1 (\bmod q) \\ 0 & si \quad u \neq 1 (\bmod q) \end{cases}$$

Para cada entero a tal que $MCD(a,q)=1$ se tiene que

$$\sum_{\chi(\text{mod}\, q)} \frac{\chi(u)}{\chi(a)} = \begin{cases} \varphi(q) & si \quad u=a \\ 0 & si \quad u \neq a \end{cases}$$

Se definen las **L-funciones de Dirichlet** como

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

donde s es un número complejo y χ un carácter de Dirichlet.

Dado que los valores de χ son periódicos, la serie $L(s,\chi)$ converge absolutamente para $\text{Re}(s)>1$ y uniformemente para $\text{Re}(s)\geq 1+\varepsilon$ para cualquier $\varepsilon>0$ dado. Además, como los coeficientes son completamente multiplicativos, la serie admite una expresión como producto

$$L(s,\chi)=\prod_{p}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

Cuando $\text{Re}(s)>1$ se tienen las siguientes propiedades (Ejercicio TeDi03):

$$L(s,\chi)\neq 0$$

$$L(s,\chi_0)=\zeta(s)\cdot\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$$

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s}$$

$$\ln\big(L(s,\chi)\big)=\sum_{p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{(\chi(p))^m}{p^{m\cdot s}}$$

De la expresión $L(s,\chi_0)=\zeta(s)\cdot\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$ y las propiedades de la función ζ se deduce que la función $L(s,\chi_0)$ es analítica en el semiplano plano complejo $\text{Re}(s)>0$ a excepción de un polo en $s=1$, cuyo residuo es $\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{\phi(q)}{q}$. Como consecuencia de ello podemos poner $L(s,\chi_0)=f(s)+\frac{\phi(q)/q}{s-1}$ donde f es analítica y no tiene singularidades en

$\mathrm{Re}(s) > 0$, de modo que la función $\dfrac{L'(s,\chi_0)}{L(s,\chi_0)} = \dfrac{f'(s) - \dfrac{\phi(q)/q}{(s-1)^2}}{f(s) + \dfrac{\phi(q)/q}{s-1}} = \dfrac{(s-1)^2 f'(s) - \phi(q)/q}{(s-1)f(s) + \phi(q)/q}\dfrac{1}{s-1}$
tiene también un polo en $s = 1$ con residuo -1.

Por otra parte, toda L-función $L(s,\chi)$ con $\chi \neq \chi_0$ es analítica y no presenta singularidades en la zona $\mathrm{Re}(s) > 0$. (Ejercicio TeDi04)

Para $k > 0$ se tiene que (Ejercicio TeDi05):

$$\sum_{p=a(\mathrm{mod}\, q)} \frac{\ln(p)}{p^k} = \sum_{n=a(\mathrm{mod}\, q)} \frac{\Lambda(n)}{n^k} - O(1)$$

, lo cual también se puede expresar como

$$\sum_{p=a(\mathrm{mod}\, q)} \frac{\ln(p)}{p^k} = \frac{-1}{\varphi(q)} \frac{L'(k,\chi_0)}{L(k,\chi_0)} - \frac{1}{\varphi(q)\chi(a)} \sum_{\substack{\chi(\mathrm{mod}\, q) \\ \chi\neq\chi_0}} \frac{L'(k,\chi)}{L(k,\chi)} - O(1)$$

y esta expresión es la clave para la prueba del Teorema de Dirichlet: se trata de verificar que el primer término del segundo miembro diverge mientras que los restantes se mantienen limitados.

Como se cumple que $L(1,\chi) \neq 0$ cuando $\chi \neq \chi_0$ (Ejercicio TeDi06) , se obtiene un valor finito para

$$\lim_{k\to 1^+} \frac{1}{\varphi(q)\chi(a)} \sum_{\substack{\chi(\mathrm{mod}\, q) \\ \chi\neq\chi_0}} \frac{L'(k,\chi)}{L(k,\chi)} = \frac{1}{\varphi(q)\chi(1)} \sum_{\substack{\chi(\mathrm{mod}\, q) \\ \chi\neq\chi_0}} \frac{L'(1,\chi)}{L(1,\chi)} = O(2)$$

y entonces, dado que según vimos, $\dfrac{1}{\chi_0(a)}\dfrac{L'(k,\chi_0)}{L(k,\chi_0)} = \dfrac{L'(k,\chi_0)}{L(k,\chi_0)}$ tiene un polo en $s = 1$ con residuo –1, se cumple que

$$\lim_{k\to 1^+} \frac{L'(k,\chi_0)}{L(k,\chi_0)} = -\infty$$

y con eso nos queda

$$\sum_{p=a(\mathrm{mod}\, q)} \frac{\ln(p)}{p} = \lim_{k\to 1^+} \sum_{p=a(\mathrm{mod}\, q)} \frac{\ln(p)}{p^k} = \frac{-1}{\varphi(q)} \left(\lim_{k\to 1^+} \frac{L'(k,\chi_0)}{L(k,\chi_0)} + O(2) \right) + O(1) = \infty$$

con lo cual concluye la demostración del teorema.

APÉNDICE

PRINCIPIO DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN[2]

Supongamos que tenemos un conjunto de N objetos sobre los que se han definido unas propiedades $P_1, P_2, ..., P_t$ y que el número de objetos que tienen la propiedad P_i está dado por N_i, el número de objetos que tienen la propiedad P_i y la propiedad P_j simultáneamente están dados por N_{ij}, y en general $N_{i_1 ... i_k}$ es la cantidad de objetos que tienen simultáneamente las propiedades $P_1, ..., P_{k-1}$ y P_k. Entonces el número de objetos que no tiene ninguna de las propiedades $P_1, ..., P_t$ está dado por

$$N - \sum_{0<i\le t} N_i + \sum_{0<i<j\le t} N_{ij} + \cdots + (-1)^k \sum_{0<i_1<...<i_k\le t} N_{i_1...i_k} + \cdots + (-1)^t N_{i_1...i_t}$$

Incluimos aquí la demostración:

Para un conjunto vacío, el teorema se cumple dado que todos los términos se anulan.

Procedamos por inducción, suponiendo que el teorema es cierto para conjuntos de N elementos.

Consideremos un conjunto que se puede obtener añadiendo un elemento a otro conjunto de N elementos.

Si el objeto no tiene ninguna de las propiedades, el único término de la suma que se incrementa es N y el teorema se sigue cumpliendo.

Si por el contrario, el objeto tiene n de las propiedades, digamos, sin perder generalidad, que $P_1, P_2, ..., P_n$, entonces el valor de $\sum_{0<i_1<...<i_k\le t} N_{i_1...i_k}$ se incrementa una vez por cada $N_{i_1...i_k}$ donde $i_1, ..., i_k$ es una combinación de $1, ..., n$, esto es $\binom{n}{k}$ veces si $k \le n$ o 0 si $k > n$, de modo que el incremento total en la suma estará dado por

$$1 - n + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^k \binom{n}{k} + \cdots + (-1)^k \binom{n}{n} = (1-1)^n = 0$$

Concluimos entonces que, al añadir el elemento, la suma solo se ha incrementado si el objeto no tiene ninguna de las propiedades y el teorema se cumple también para conjuntos de $N+1$ elementos.

---

[2] Este principio se utilizó en uno de los ejercicios referentes a la función de Euler.

EJERCICIOS

Ejercicio TeDi01

Para todo $u \in G$ distinto de la unidad existe al menos un carácter χ tal que $\chi(u) \neq 1$

▷

Consideremos la descomposición del grupo G[3] en producto de subgrupos cíclicos $G = G_1 \cdot G_2 \cdots G_k$ de ordenes $h_1, h_2, \ldots h_k$ tales que $h = h_1 h_2 \ldots h_k$. En cada uno de los subgrupos cíclicos G_i se toma un elemento generador, digamos a_i. Todo elemento u de G será igual a $u = a_1^{b_1} a_2^{b_2} \ldots a_k^{b_k}$ con $0 \leq b_i < h_i$, donde únicamente para el elemento unidad todos los b_i son nulos.

Cualquier carácter χ del grupo G quedará definido si se conocen los valores para los elementos generadores, siendo $\chi(u) = \chi(a_1)^{b_1} \chi(a_2)^{b_2} \ldots \chi(a_k)^{b_k}$.

Consideremos fijado $u \neq e$ y un j tal que el elemento b_j correspondiente a u no es nulo, entonces el carácter que se define a partir de la relación

$$\chi(a_m) = \begin{cases} 1 & si \quad m \neq j \\ e^{2\pi i / h_j} & si \quad m = j \end{cases}$$

cumple $\chi(u) = e^{2\pi i b_j / h_j} = \cos(2\pi \frac{b_j}{h_j}) + i \cdot sen(2\pi \frac{b_j}{h_j})$ y dado que $0 < \frac{b_j}{h_j} < 1$, será $\chi(u) \neq 1$

◁

Ejercicio TeDi02.1

$\sum_\chi \chi(u) = \begin{cases} c & si \quad u = e \\ 0 & si \quad u \neq e \end{cases}$ para todo $u \in G$ donde $c = \sum_\chi 1$ es el número de caracteres

▷ $\sum_\chi \chi(e) = \sum_\chi 1 = c$

Si $u \neq e$ existe un carácter χ' tal que $\chi'(u) \neq 1$ entonces

$$\chi'(u) \sum_\chi \chi(u) = \sum_\chi \chi'(u)\chi(u) = \sum_\chi \chi' \chi(u) = \sum_\chi \chi(u)$$

---

[3] Los generadores del grupo Z_q^* son precisamente las clases correspondientes a raíces primitivas, que aquí presentadas como a_i, y, según vimos, cualquier elemento de Z_q^* se expresa como un producto de potencias de estas raíces primitivas. Cada subgrupo G_i de los que aquí se habla será entonces el conjunto de potencias de la clase asociada una raíz primitiva a_i.

ya que la relación $\chi \leftrightarrow \chi'\chi$ es 1-1 en el conjunto de caracteres. De aquí se obtiene que

$(\chi'(u)-1)\sum_{\chi}\chi(u)=0$ y entonces $\sum_{\chi}\chi(u)=0$ puesto que $\chi'(u)-1\neq 0$.

◁

Ejercicio TeDi02.2

$$\sum_{u\in G}\chi(u)=\begin{cases} h & si \quad \chi=\chi_0 \\ 0 & si \quad \chi\neq\chi_0 \end{cases}$$ donde h es el orden de G

▷

$$\sum_{u\in G}\chi_0(u)=\sum_{u\in G}1=h$$

Si $\chi\neq\chi_0$, entonces existe $u'\in G$ tal que $\chi(u')\neq 1$ y entonces

$$\chi(u')\sum_{u\in G}\chi(u)=\sum_{u\in G}\chi(u')\chi(u)=\sum_{u\in G}\chi(u'u)=\sum_{u\in G}\chi(u)$$

luego $(\chi(u')-1)\sum_{u\in G}\chi(u)=0$ y debe ser $\sum_{u\in G}\chi(u)=0$.

◁

Ejercicio TeDi02.3

En un grupo conmutativo finito el número de caracteres es igual al orden del grupo

▷

$$h=\sum_{u\in G}\chi_0(u)=\sum_{u\in G}\chi_0(u)+\sum_{\chi\neq\chi_0}\sum_{u\in G}\chi(u)=\sum_{\chi}\sum_{u\in G}\chi(u)=$$
$$=\sum_{u\in G}\sum_{\chi}\chi(u)=\sum_{\substack{u\in G\\ u\neq e}}\sum_{\chi}\chi(u)+\sum_{\chi}\chi(e)=\sum_{\chi}\chi(e)=c$$

◁

Ejercicio TeDi02.4

Para todo $u\in G$ y $v\in G$ se cumple $\frac{1}{h}\sum_{\chi}\frac{\chi(u)}{\chi(v)}=\begin{cases} 1 & si \quad u=v \\ 0 & si \quad u\neq v \end{cases}$

▷

$$\sum_{\chi}\frac{\chi(u)}{\chi(v)}=\sum_{\chi}\chi(u)\chi(v^{-1})=\sum_{\chi}\chi(uv^{-1})=\begin{cases} c=h & si \quad uv^{-1}=e \\ 0 & si \quad uv^{-1}\neq e \end{cases}$$

◁

Ejercicio TeDi02.5

Para cualquier par de caracteres χ_1 y χ_2 se tiene que $\frac{1}{h}\sum_{u\in G}\frac{\chi_1(u)}{\chi_2(u)}=\begin{cases} 1 & si \quad \chi_1=\chi_2 \\ 0 & si \quad \chi_1\neq\chi_2 \end{cases}$

▷

$$\sum_{u\in G}\frac{\chi_1(u)}{\chi_2(u)}=\sum_{u\in G}\chi_1{\chi_2}^{-1}(u)=\begin{cases} c=h & si \quad \chi_1{\chi_2}^{-1}=\chi_0 \\ 0 & si \quad \chi_1{\chi_2}^{-1}\neq\chi_0 \end{cases}$$

◁

Ejercicio TeDi03.01

$$L(s,\chi)\neq 0 \text{ si } \operatorname{Re}(s)>1$$

▷

$$|L(s,\chi)|=\prod_p\left|\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\right|\geq\prod_{p\nmid q}\left(1+\frac{|\chi(p)|}{p^{\operatorname{Re}(s)}}\right)^{-1}=\prod_{p\nmid q}\left(1+\frac{1}{p^{\operatorname{Re}(s)}}\right)^{-1}>0$$

◁

Ejercicio TeDi03.02

$$L(s,\chi_0)=\zeta(s)\cdot\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) \text{ con } \operatorname{Re}(s)>1$$

▷

$$L(s,\chi_0)=\prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}/\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\zeta(s)\cdot\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$$

◁

Ejercicio TeDi03.03

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s} \text{ con } \operatorname{Re}(s)>1$$

▷

$$L'(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}(-\ln(n))=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}\sum_{d|n}\Lambda(d)=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n}\Lambda(d)\chi(d\cdot\frac{n}{d})\frac{1}{n^s}=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n}\Lambda(d)\chi(d)\chi(\frac{n}{d})\frac{1}{n^s}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((\chi\cdot\Lambda)_*\chi)(n)}{n^s}=-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\chi\cdot\Lambda)(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}\right)=$$

$$=-L(s,\chi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\chi\cdot\Lambda)(n)}{n^s}$$

◁

Ejercicio TeDi03.04

$$\ln\big(L(s,\chi)\big)=\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{(\chi(p))^m}{p^{m\cdot s}} \text{ con } \operatorname{Re}(s)>1$$

▷

$$\ln\big(L(s,\chi)\big)=-\sum_p\ln\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)=\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{(\chi(p))^m}{p^{m\cdot s}}$$

◁

Ejercicio TeDi04

La función $L(s,\chi)$ con $\chi\neq\chi_0$ es analítica y no tiene singularidades cuando $\operatorname{Re}(s)>0$

▷ Dada una L-función $\chi\neq\chi_0$ definimos

$$S_\chi(x)=\sum_{n\le x}\chi(n)$$

La función se repite con periodo q y se tiene que $S_\chi(n)=0$ cuando $0\equiv n(\bmod q)$. Dado que $|\chi|=1$, será siempre $|S_\chi(n)|\le q$.

Aplicando la fórmula de Abel $\sum_{a<n\le x}a(n)f(n)=A(x)f(x)-\int_a^x A(t)f'(t)dt$ con $a(n)=\chi(n)$ y $f(n)=n^{-s}$ encontramos

$$\sum_{1<n\le x}\frac{\chi(n)}{n^s}=\frac{S_\chi(x)}{x^s}+s\int_1^x S_\chi(t)\cdot t^{-s-1}dt$$

y tomando límites se obtiene

$$L(s,\chi)=s\int_1^\infty\frac{S_\chi(t)}{t^{s+1}}dt$$

Como

$$\int_1^x |S_\chi(t)|\cdot t^{-\mathrm{Re}(s)-1}dt\le|s|\int_1^\infty q\cdot t^{-\mathrm{Re}(s)-1}dt=\lim_{x\to\infty}\frac{q\cdot|s|}{\mathrm{Re}(s)}(1-\frac{1}{x^{\mathrm{Re}(s)}})=\frac{q}{\mathrm{Re}(s)}$$

la expresión $\int_1^\infty\frac{S_\chi(t)}{t^{s+1}}dt$ proporciona una función convergente y analítica en el semiplano abierto $\mathrm{Re}(s)>0$,sin ninguna singularidad en esta zona. También se tiene que

$$|L(s,\chi)|\le\frac{q\,|s|}{\mathrm{Re}(s)}$$

◁

Ejercicio TeDi05.1

$$\boxed{\sum_{p=a(\bmod q)}\frac{\ln(p)}{p^k}=\sum_{n=a(\bmod q)}\frac{\Lambda(n)}{n^k}-0(1)\ \text{ cuando }\ k>0}$$

▷

$$0\le\sum_{n=a(\bmod q)}\frac{\Lambda(n)}{n^k}-\sum_{p=a(\bmod q)}\frac{\ln(p)}{p^k}=\sum_{m=1}^\infty\sum_{p^m=a(\bmod q)}\frac{\ln(p)}{p^{mk}}-\sum_{p=a(\bmod q)}\frac{\ln(p)}{p^k}=$$

$$=\sum_{m=2}^\infty\sum_{p^m=a(\bmod q)}\frac{\ln(p)}{p^{mk}}\le\sum_{m=2}^\infty\sum_p\frac{\ln(p)}{p^{mk}}=\sum_p\ln(p)\sum_{m=2}^\infty p^{-mk}=$$

$$=\sum_p\ln(p)\cdot\frac{p^{-2k}}{1-p^{-k}}=\sum_p\frac{\ln(p)}{p^k(1-p^k)}\le\sum_p\frac{\ln(p)}{p(1-p)}$$

◁

Ejercicio TeDi05.2

$$\boxed{\sum_{p=a(\bmod q)}\frac{\ln(p)}{p^k}=\frac{-1}{\varphi(q)}\frac{L'(k,\chi_0)}{L(k,\chi_0)}-\frac{1}{\varphi(q)\chi(a)}\sum_{\substack{\chi(\bmod q)\\ \chi\ne\chi_0}}\frac{L'(k,\chi)}{L(k,\chi)}-0(1)\ \text{ con }\ k>0}$$

▷

$$\sum_{p=a(\mathrm{mod}\,q)} \frac{\ln(p)}{p^k} = \sum_{n=a(\mathrm{mod}\,q)} \frac{\Lambda(n)}{n^k} - 0(1) = \sum_n \left(\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(\mathrm{mod}\,q)} \frac{\chi(n)}{\chi(a)} \right) \frac{\Lambda(n)}{n^k} - 0(1) =$$
$$= \frac{1}{\varphi(q)\chi(a)} \sum_{\chi(\mathrm{mod}\,q)} \sum_n \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^k} - 0(1) = \frac{-1}{\varphi(q)\chi(a)} \sum_{\chi(\mathrm{mod}\,q)} \frac{L'(k,\chi)}{L(k,\chi)} - 0(1) =$$
$$= -\frac{1}{\varphi(q)} \frac{L'(k,\chi_0)}{L(k,\chi_0)} - \frac{1}{\varphi(q)\chi(a)} \sum_{\substack{\chi(\mathrm{mod}\,q)\\ \chi\neq\chi_0}} \frac{L'(k,\chi)}{L(k,\chi)} - 0(1)$$

◁

Ejercicio TeDi06.1

$L(1,\chi) \neq 0$ cuando $\chi \neq \chi_0$ y χ no es una función real

▷ Cuando $k > 1$ se tiene

$$\sum_{\chi(\mathrm{mod}\,q)} \ln\big(L(k,\chi)\big) = \sum_{\chi(\mathrm{mod}\,q)} \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{(\chi(p))^m}{p^{m\cdot k}} = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\sum_{\chi(\mathrm{mod}\,q)} \chi(p^m)}{p^{m\cdot k}} =$$
$$= \sum_p \sum_{\substack{m=1\\ p^{m\cdot} \equiv 1(\mathrm{mod}\,q)}}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\phi(q)}{p^{m\cdot k}} = \phi(q) \sum_p \sum_{\substack{m=1\\ p^{m\cdot} \equiv 1(\mathrm{mod}\,q)}}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{m\cdot k}} > 0$$

de modo que

$$\left| \prod_{\chi(\mathrm{mod}\,q)} L(k,\chi) \right| = \exp\left(\sum_{\chi(\mathrm{mod}\,q)} \ln\big(L(k,\chi)\big) \right) > \exp(0) = 1$$

Si suponemos que para algún carácter χ_1 no real se tiene $L(1,\chi_1) = 0$, entonces, dado que $\chi_1 \neq \overline{\chi}_1$ y $L(1,\overline{\chi}_1) = \overline{L(1,\chi_1)} = 0$ también es otro cero, en el producto $\prod_{\chi(\mathrm{mod}\,q)} L(k,\chi)$ hay al menos dos ceros cuando $k \to 1$, los cuales son suficientes para cancelar el único polo simple correspondiente a $L(1^+,\chi_0)$, de modo que se tendría $\lim_{k\to 1^+} \left| \prod_{\chi(\mathrm{mod}\,q)} L(k,\chi) \right| = 0$, en contradicción con la desigualdad obtenida.

◁

Ejercicio TeDi06.2

$L(1,\chi) \neq 0$ cuando $\chi \neq \chi_0$ y χ es una función real

▷

Si suponemos que $L(1,\chi) = 0$, entonces la función $F(s) = \zeta(s) \cdot L(s,\chi)$ sería analítica y no presentaría singularidades en $\mathrm{Re}(s) > 0$. Además, cuando $\mathrm{Re}(s) > 1$ se tendría

$$F(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_* \chi(n)}{n^s}$$

La función $1_*\chi(n)$ es múltiplicativa, y como $\chi(n)$ es un divisor real de la unidad, $\chi(n) = 0$ o $\chi(n) = \pm 1$, de modo que para una potencia de un número primo se tiene que

$$1_*\chi(p^k) = \sum_{i=0}^{k} \chi(p^i) = \sum_{i=0}^{k} \chi(p)^i = \begin{cases} 1 & si \quad \chi(p)=0 \\ k+1 & si \quad \chi(p)=1 \\ 1 & si \quad \chi(p)=-1 \quad y \quad k \quad es \quad par \\ 0 & si \quad \chi(p)=-1 \quad y \quad k \quad es \quad impar \end{cases}$$

Esto implica que $1_*\chi(n) \geq 1_*\lambda(n) = \begin{cases} 1 & si\ n\ \ es\ un\ cuadrado\ exacto \\ 0 & si\ n\ no\ es\ un\ cuadrado\ exacto \end{cases}$

Observemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_*\lambda(n)}{n^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2)^s} = \zeta(2s)$ converge absolutamente si $\mathrm{Re}(s) > 1/2$

Dado que, de acuerdo a nuestra suposición, $F(s)$ no tiene singularidades cuando $\mathrm{Re}(s) > 0$, podemos realizar un desarrollo de Taylor en un punto $x_0 > 0$ que convergerá si $0 < x \leq x_0$, obteniendo

$$F(x) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{F^{(d}(x_0)}{d!} (x - x_0)^d$$

ahora bien, si $x_0 > 1/2$ tenemos

$$(-1)^d F^{(d}(x_0) = (-1)^d \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_*\chi(n)}{n^{x_0}} (-\ln(n))^d \geq$$

$$\geq (-1)^d \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_*\lambda(n)}{n^{x_0}} (-\ln(n))^d = (-1)^d D_{x_0}^{(d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_*\lambda(n)}{n^{x_0}} = (-1)^d D_{x_0}^{(d} \zeta(2x_0) = (-2)^d \zeta^{(d}(2x_0) \geq 0$$

de modo que

$$F(x) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{F^{(d}(x_0)}{d!} (x - x_0)^d = \sum_{d=1}^{\infty} (-1)^d \frac{F^{(d}(x_0)}{d!} (x_0 - x)^d \geq \sum_{d=1}^{\infty} \frac{(-1)^d D^d \zeta(2x_0)}{d!} (x_0 - x)^d =$$

$$= \sum_{d=1}^{\infty} \frac{D^d \zeta(2x_0)}{d!} (x - x_0)^d = \zeta(2x - 2x_0)$$

Pero entonces $F(1/2) \geq \zeta(1 - 2x_0)$ cuando $x_0 > 1/2$ y como

$$\lim_{x_0 \to 1/2^+} \zeta(1 - 2x_0) = \lim_{a \to 1^-} \zeta(a) = \infty$$

se tiene $F(1/2) = \infty$, en contradicción con nuestra suposición, según la cual F no debería tener singularidades cuando $\mathrm{Re}(s) > 0$.

$\triangleleft$